

CPM

El método de la ruta crítica o del camino crítico es un algoritmo utilizado para el cálculo de tiempos y plazos en la planificación de proyectos. Este sistema de cálculo, conocido por sus siglas en inglés CPM (*Critical Path Method*), sirve para estimar la duración mínima del proyecto y determinar el nivel de flexibilidad en la programación de los caminos de red lógicos dentro del cronograma. Esta técnica de análisis de la red del cronograma calcula las fechas de inicio y finalización, tempranas y tardías, para todas las actividades, sin tener en cuenta las limitaciones de recursos, y realiza un análisis que recorre hacia adelante y hacia atrás toda la red del cronograma, cuando los tiempos de las actividades se conocen en forma determinísticas y se pueden variar cambiando el nivel de recursos utilizados.

En CPM solamente se requiere un estimado de tiempo. Todos los cálculos se hacen con la suposición de que los tiempos de actividad se conocen, la duración de las actividades se fijó de manera determinista (tiempo previsto único), por lo que este método resulta más apto para proyectos de montaje de instalaciones de telecomunicaciones compuestos por muchas actividades que tengan antecedentes de aplicación y permitan evaluar los tiempos con razonable precisión. A medida que el proyecto avanza, estos estimados se utilizan para controlar y monitorear el progreso. Si ocurre algún retardo en el proyecto, se hacen esfuerzos por lograr que el proyecto quede de nuevo en programa cambiando la asignación de recursos.

En este caso el objetivo es la programación y control de desarrollo de tareas para determinar la duración total del proyecto que determine el menor costo global (costos directos + indirectos), no necesariamente la mínima duración. Eventualmente, al evaluar costes, se tratan los conceptos de tiempos normales y tiempos acelerados.

Planteamiento y Desarrollo utilizando el diagrama de red de Actividad Sobre Flecha (AOA) (el método AON sería similar). A la hora de desarrollar y presentar un diagrama PCM se han de tener en cuenta las siguientes normas básicas:

1. El **tiempo total** de duración del proyecto es la suma de los tiempos del “camino crítico” del mismo, es decir, la duración de la mayor de entre todas las “cadenas” de actividades descriptas por la red entre el evento de inicio y el de terminación, siempre.
2. **Actividad:** es la ejecución real de una tarea. Se representar por una flecha, en dónde colocaremos el nombre de la actividad o la A_{ij} comienza en el suceso i y acaba en el suceso j y el coste de tiempo cuya duración prevista única es d_{ij} . La inclusión de tareas ficticias se identificará con una duración prevista nula (0).

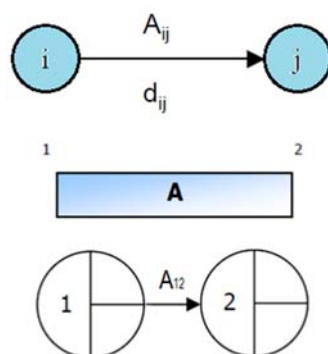


Figura. Actividad A_{ij} con duración d_{ij} .

3. **Nudo, suceso o acontecimiento:** representado por un círculo o un rectángulo, representan instantes (duración nula) en el desarrollo del proyecto, llamados eventos, que caracterizan los estados de comienzo o final de una o varias tareas. Por ejemplo, escribir un informe no es un nudo, en cambio comenzar o terminar un informe sí es un nudo. Todo nudo viene caracterizado por qué debe representar un punto significativo del proyecto y no consume tiempo ni recursos. Se numerarán cada uno de ellos según la secuencia temporal.

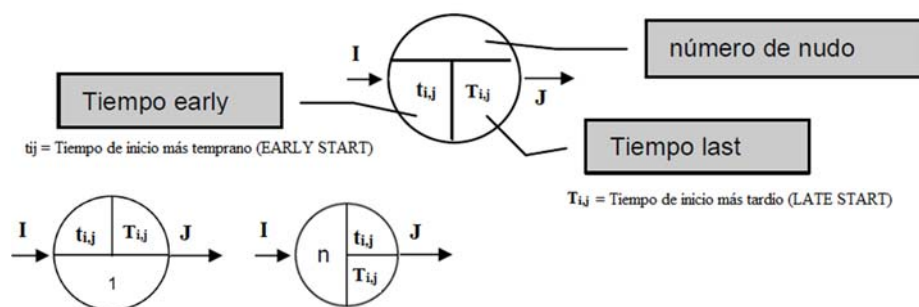


Figura. Representación de un nodo por círculo.

Cada nodo se representa mediante un círculo que contiene el número de nodo (arbitrario), la fecha temprana del suceso ($t_{i,j}$) de las tareas que se inician en ese instante y la fecha tardía del evento ($T_{i,j}$) de las tareas que finalizan en ese instante.

$t_{i,j}$ tiempo más temprano de realización de un evento. Se entiende por inicio mínimo al tiempo mínimo que tiene que pasar desde el inicio del proyecto para poder empezar una determinada tarea, en el caso de que no se hayan producido retrasos en las tareas de las que depende, es decir, que es la fecha más temprana en la cual puede iniciarse una tarea. También se llama **tiempos tempranos de suceso o inicio mínimo Im**. El tiempo temprano del suceso i (*tiempo early start*) nos indica el instante de tiempo en el que más pronto puede empezar la actividad sucesora A_{ij} . El tiempo temprano del suceso j se calcula sumando al tiempo temprano del suceso i la duración de la actividad A_{ij} . En el caso de que hubiera varias actividades antecesoras al suceso j se tomará el valor máximo de las sumas. Por tanto, los tiempos tempranos se calculan mediante una pasada hacia delante, en el sentido de tiempos crecientes, para calcular este indicador deberá recorrerse la red de izquierda a derecha y considerando lo siguiente:

- $t_{i,j}$ del primer nodo es igual a 0.
- $t_{i,j}$ del nodo $n = t_{i,j}$ del nodo $n-1$ (nodo anterior) + duración de la actividad que finaliza en el nodo n .
- Si en un nodo finaliza más de una actividad, se toma el tiempo de la actividad con mayor valor.

Cuando se calcula el inicio mínimo de una tarea se obtiene un valor numérico expresado en las unidades de tiempo del proyecto y, para poder convertir ese valor en una fecha, es necesario utilizar el calendario del proyecto. Para poder reducir el inicio mínimo de una tarea es necesario reducir la duración de una o más tareas (dependerá de la estructura del proyecto) predecesoras de la tarea considerada.

A su vez, el inicio mínimo de una tarea depende directamente del mayor fin mínimo (F_m) de sus tareas predecesoras, a partir de lo cual podemos deducir, que si las tareas j son predecesoras de la tarea k , entonces:

$$I_m^k = \max(F_m^j)$$

Fin mínimo (F_m). Por su parte, el fin mínimo es el tiempo mínimo que tiene que pasar desde el inicio del proyecto para poder finalizar una determinada tarea, en el caso de que no se hayan producido retrasos en la misma ni en las tareas de las que depende, es decir, la fecha más temprana en la que puede finalizarse una tarea.

Cuando se calcula el fin mínimo de una tarea se obtiene un valor numérico expresado en las unidades de tiempo del proyecto, y para poder convertir ese valor en una fecha es necesario utilizar el calendario del proyecto. Conocido el inicio mínimo de una tarea y su duración, el fin mínimo se calcula sumando la duración al inicio mínimo.

$$F_m = I_m + d$$

Fin máximo (F_M). Es el tiempo que, como máximo, puede pasar desde el inicio del proyecto hasta la finalización de una tarea sin que se produzca un incremento en la duración del proyecto, es decir, es la fecha más tardía en la que puede finalizarse una tarea. Cuando se calcula el fin máximo de una tarea se obtiene un valor numérico expresado en las unidades de tiempo del proyecto. Para poder convertir ese valor en una fecha es necesario utilizar el calendario del proyecto.

Si una tarea finaliza después de su fin máximo, aunque las tareas sucesoras de la misma se ejecuten sin retrasos, la finalización del proyecto sufrirá un retraso. El fin máximo de una tarea viene determinado por el menor inicio máximo de sus sucesoras.

Si las tareas j son sucesoras de la tarea k , entonces:

$$F_M^k = \min(I_M^j)$$

Inicio máximo (IM). Es el tiempo que, como máximo, puede pasar desde el inicio del proyecto hasta el inicio de una tarea sin que se produzca un incremento en la duración del proyecto, en otras palabras, la fecha más tardía en la que puede iniciarse una tarea. Cuando se calcula el inicio máximo de una tarea se obtiene un valor numérico expresado en las unidades de tiempo del proyecto. Para poder convertir ese valor en una fecha es necesario utilizar el calendario del proyecto.

Conocido el fin máximo de una tarea y su duración, el inicio máximo se calcula restando la duración al fin máximo. Sea F^k el fin máximo de la tarea k , y d^k su duración. El inicio máximo I_M^k viene dado por:

$$I_M^k = F_M^k - d^k$$

Tiempos tardíos de suceso (T_{ij}). El tiempo tardío del suceso j (*tiempo late finish*) nos indica el instante de tiempo en el que más tarde puede terminar la actividad antecesora A_{ij} para que no se retrase el proyecto. El tiempo más tardío de realización del evento i es igual a la diferencia entre el tiempo tardío del suceso j y la duración de la actividad A_{ij} . En el caso de que hubiera varias actividades sucesoras al suceso i , se tomará el mínimo de las diferencias. Por tanto, los tiempos tardíos se calculan mediante una pasada hacia atrás, en el sentido de tiempos decrecientes. Se deberá recorrer la red de derecha a izquierda y considerando lo siguiente:

- T_{ij} del primer nodo (de derecha a izquierda) es igual al t_{ij} de este.
- T_{ij} del nodo $n = T_{ij}$ del nodo $n-1$ (nodo anterior, de derecha a izquierda) - duración de la actividad que se inicia.
- Si en un nodo finaliza más de una actividad, se toma el tiempo de la actividad con menor valor.

Margen libre (ML) u holgura libre. Se define por margen libre como el margen de retraso del que dispone una tarea (o sea, lo que puede retrasarse su inicio o finalización) sin que afecte a los inicios mínimos de las tareas sucesoras. El margen libre de una tarea puede calcularse como la diferencia entre el menor inicio mínimo de sus sucesoras y su fin mínimo.

Si las tareas j son sucesoras de la tarea k , entonces:

$$M_L^k = \min(I_m^j) - F_m^k$$

Margen total (MT) u holgura total. Es el margen de retraso del que dispone una tarea (es decir, lo que puede retrasarse su inicio o finalización) sin que afecte a la duración del proyecto. Se puede observar que el margen total es menos restrictivo que el margen libre. El margen total solo hace referencia al retraso del proyecto, pero no a la posibilidad de retrasar el inicio de una tarea sucesora, es más si se consume el margen total de una tarea, todas las actividades sucesoras se tendrán que iniciar en su inicio máximo y, además, el margen total de las mismas se habrá agotado.

El margen total de una tarea es la diferencia entre su inicio máximo y su inicio mínimo. También se puede calcular como la suma de su margen libre y los márgenes libres de todas sus sucesoras.

Si I_m^k y I_M^k son el inicio mínimo y inicio máximo de la tarea k , entonces:

$$M_T^k = I_M^k - I_m^k$$

Camino crítico. Es la cadena desde el nodo de inicio hasta el de terminación del proyecto que determina su duración mínima real, como aquella secuencia de tareas en las que todas sus tareas tienen margen total igual a cero. Se caracteriza porque en todos los eventos que forman parte de él las FECHAS TARDÍAS Y TEMPRANAS SON COINCIDENTES. Es decir, no disponen de holguras para su ejecución.

H: Tiempo de holgura u holgura de nodo. La holgura de un nodo se define como la diferencia entre su tiempo tardío (T_i) y su tiempo temprano (t_i). Esta holgura, dada en unidades de tiempo, corresponde al valor en el que la ocurrencia de un evento puede tardarse. Los eventos en los cuales la holgura sea igual a cero ($T_i - t_i = 0$) corresponden a la ruta crítica, es decir, la ocurrencia de estos eventos no puede tardarse una sola unidad de tiempo respecto al cronograma establecido, dado que en el caso en que se tardara retrasaría la finalización del proyecto.

Actividades críticas. Una actividad es crítica cuando sus nodos inicial y final son críticos, es decir $t_i = T_i$ y $t_j = T_j$. En este caso, $t_j - t_i = T_j - T_i = d_{ij}$. Estas actividades deben comenzar y finalizar en instantes definidos para no afectar a la duración del proyecto, es decir no tienen holgura (o la holgura es negativa). En el caso contrario, se dice que son no críticas.

1. **Solo puede haber un nodo inicial y un nodo final.** O sea, solo puede haber un nodo al que no llegue ninguna flecha, nada más salgan (nodo inicial) y solo puede haber un nodo al que nada más lleguen flechas, sin que salga ninguna (nodo final).
2. **Los recorridos posibles** (siguiendo las flechas) sobre el gráfico nos indican los caminos del proyecto, o sea, las secuencias de tareas. Convencionalmente se desarrolla la red de programación de izquierda a derecha.
3. No está permitido **nunca tener dos nodos unidos entre sí por más de una flecha.**

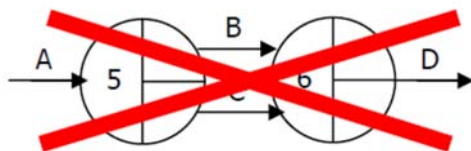


Figura. No aceptación.

Se pueden introducir tareas ficticias, de duración 0, para evitar construcciones ilegales o representar dependencias entre tareas, como en los casos/ejemplos siguientes.

- Caso 1: las tareas B y C dependen de la tarea A, mientras que la tarea D depende, a su vez, de B y C; la representación más inmediata sería la mostrada en el gráfico anterior, que no está permitida.

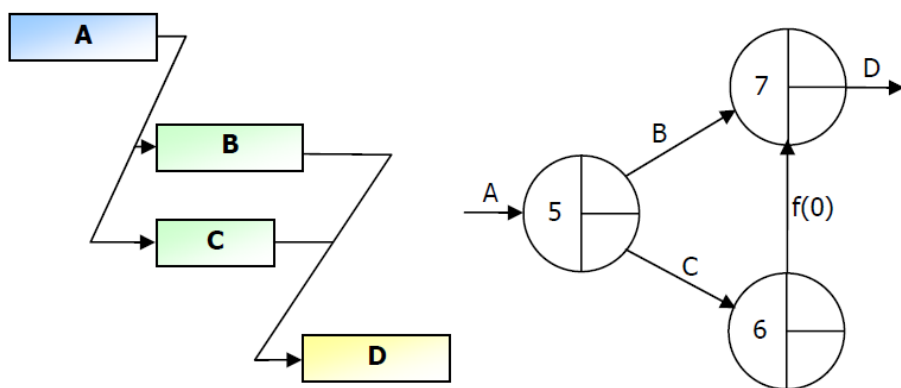


Figura de resolución de no aceptación caso 1

- Caso 2: La tarea C depende de A y la tarea D depende de A y B. Siguiendo las flechas, puede comprobarse que el gráfico propuesto define los caminos A-C y A-D e B-D.

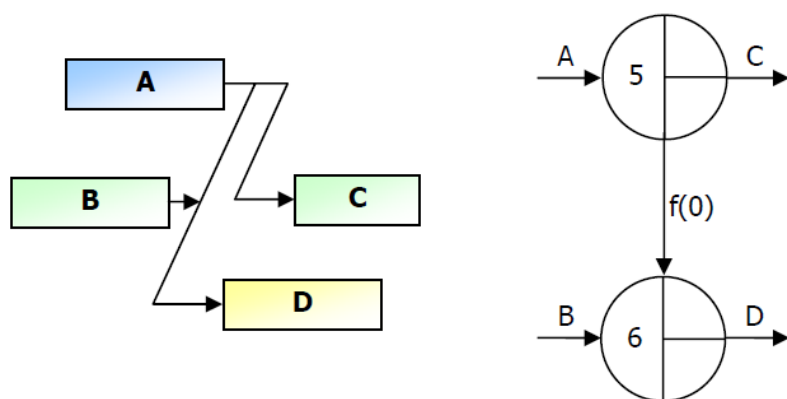


Figura. Resolución de no aceptación caso 2.

4. Identificar todas las actividades que intervienen en el proyecto, sus interrelaciones, sucesiones, reglas de precedencia. Con la inclusión de cada actividad al proyecto se debe cuestionar respecto a que actividades preceden a esta, y a

cuáles siguen inmediatamente esta finalice. Además, deberá relacionarse el tiempo estimado para el desarrollo de cada actividad. Por ejemplo, para:

Actividad	Actividad Predecesora	Tiempo
A	---	3h
B	A	1h
C	A	2h
D	A	2h
E	B-C-D	4h

Figura. Actividades del proyecto para redes deterministas.

- Con base en la información obtenida en la tabla y haciendo uso de los conceptos básicos para diagramar una red, obtendremos el gráfico del proyecto con dos actividades ficticias Fb y Fd que no consumen tiempo ni recursos.

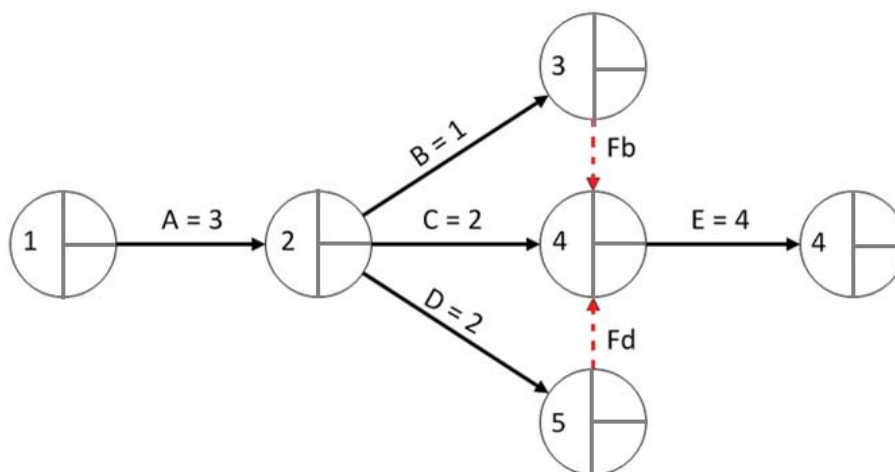
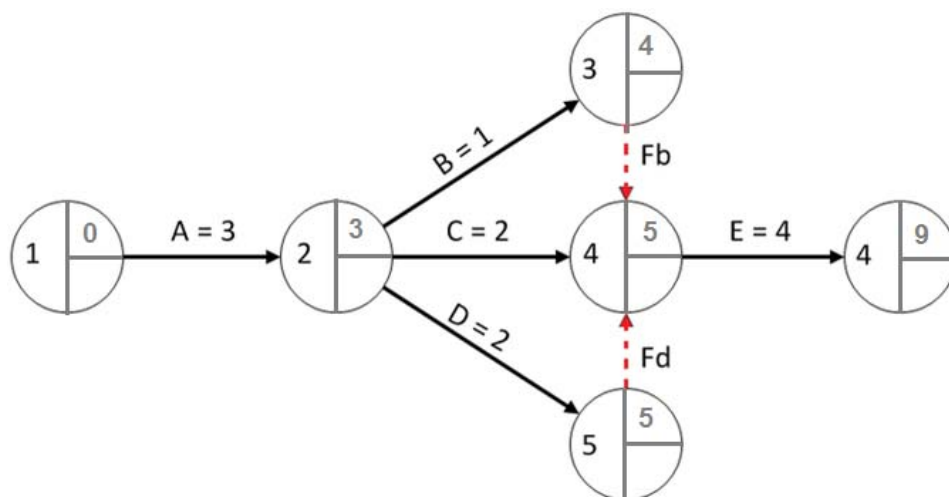


Figura. Gráfico del proyecto.

- Para el cálculo de la red se consideran 3 indicadores, t_{ij} (Tiempo más temprano de realización de un evento), T_{ij} (Tiempo más tardío de realización del evento) y H (Tiempo de holgura). Estos indicadores se calculan en cada evento o nodo (entiéndase nodo entonces como un punto en el cual se completan actividades y se inician las subsiguientes).


Figura. Gráfico del proyecto con los *early start*.

En este caso para el cálculo del t_{ij} en el nodo 4, en el que concurren la finalización de 3 actividades, 2 de ellas ficticias (Fb y Fd, cuyos tiempos son cero) y una es la actividad C. En este caso deberá considerarse el mayor de los t_{ij} resultantes:

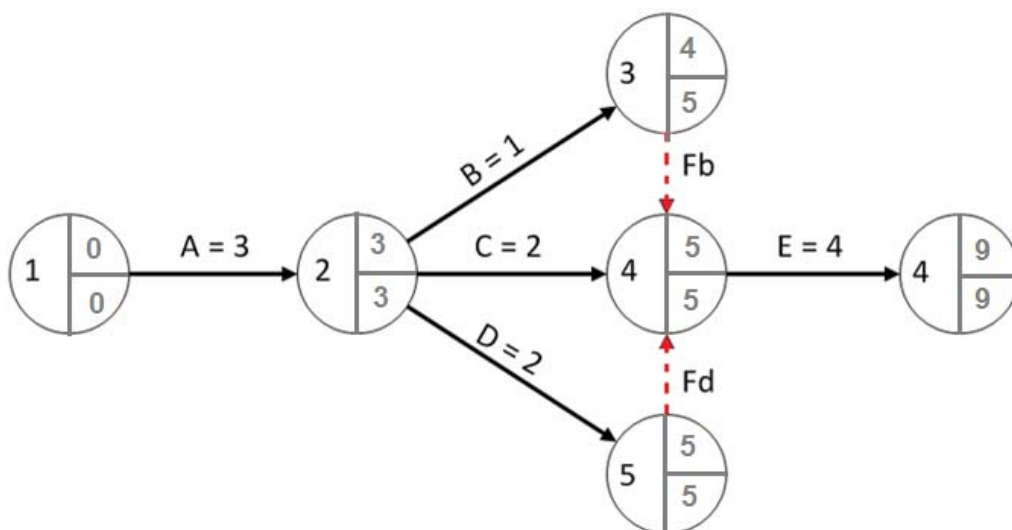
$$t_{ij}(\text{nodo } 3) + Fb = 4 + 0 = 4$$

$$t_{ij}(\text{nodo } 2) + C = 3 + 2 = 5$$

$$t_{ij}(\text{nodo } 5) + Fd = 5 + 0 = 5$$

Así entonces, el t_{ij} en el nodo 4 será igual a 5 (el mayor valor).

El T_{ij} : tiempo más tardío de realización del evento calculado recorriendo la red de derecha a izquierda:


Figura. Gráfico del proyecto con los *late finish*.

En este caso para el cálculo del T_{ij} del nodo 2, en el que concurren el inicio de varias actividades deberá entonces considerarse lo siguiente:

$$T_{i,j}(\text{nodo } 3) - B = 5 - 1 = 4$$

$$T_{i,j}(\text{nodo } 4) - C = 5 - 2 = 3$$

$$T_{i,j}(\text{nodo } 5) - D = 5 - 2 = 3$$

Así entonces, el $T_{i,j}$ del nodo 2 será 3, es decir el menor valor.

El cálculo del Tiempo de holgura H.

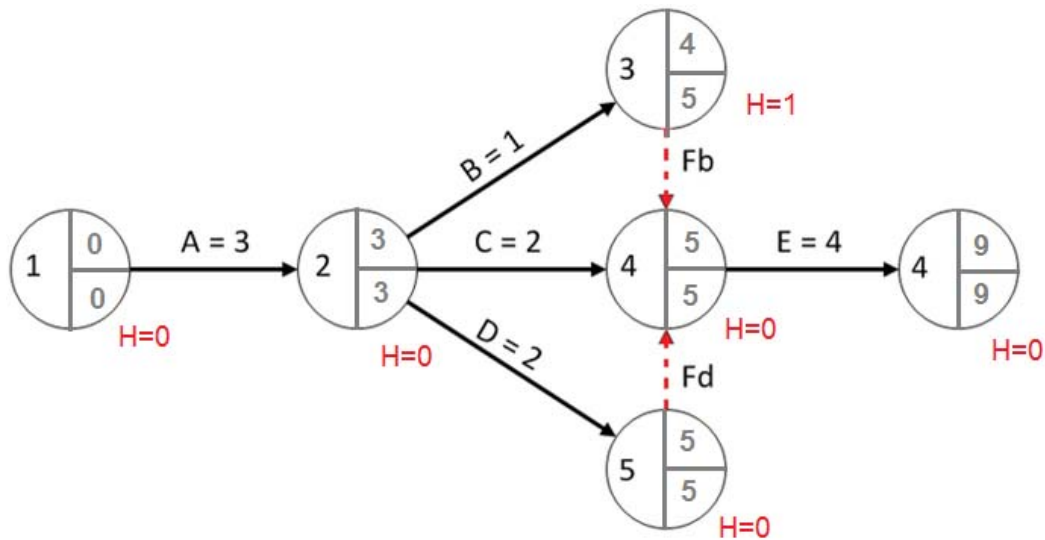


Figura. Gráfico del proyecto con los tiempos de holgura.

Las actividades críticas constituyen la ruta más larga que abarca el proyecto, es decir, que la sumatoria de las actividades de una ruta crítica determinará la duración estimada del proyecto. En este caso hay 2.

Ruta crítica 1:

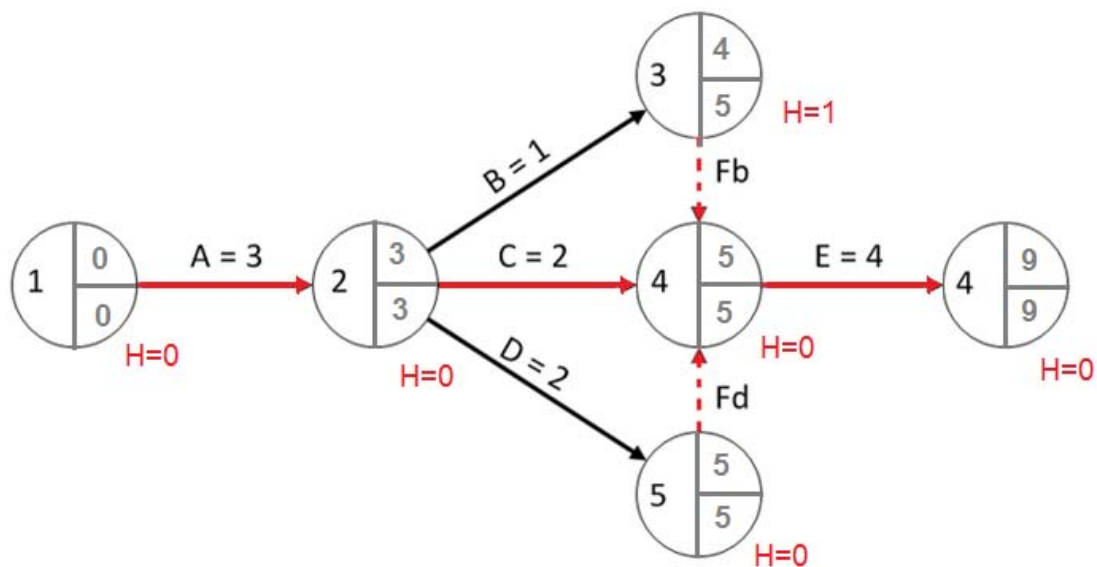


Figura. Gráfico del proyecto con la ruta crítica 1.

Esta ruta se encuentra compuesta por las actividades A, C y E. La duración del proyecto será de 9 horas.

Ruta Crítica 2:

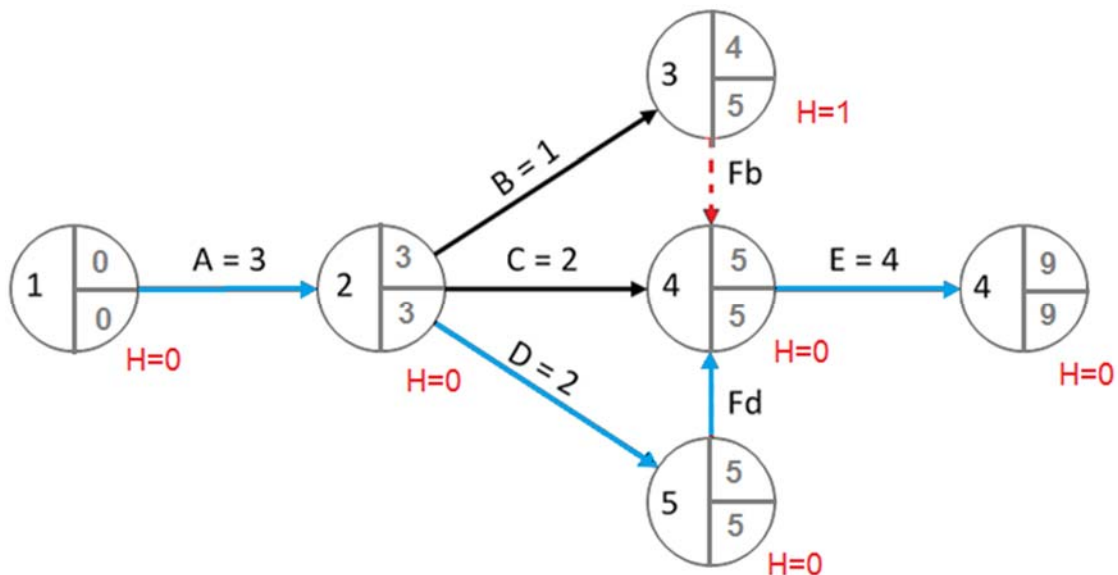


Figura. Gráfico del proyecto con la ruta crítica 2.

Esta ruta se encuentra compuesta por las actividades A, D, Fd y E. La duración del proyecto será de 9 horas.

- Para establecer su cronograma deberán considerarse varios factores, el más importante de ellos es la relación de precedencia, y el siguiente corresponde a escalonar las actividades que componen la ruta crítica de tal manera que se

complete el proyecto dentro de la duración estimada.

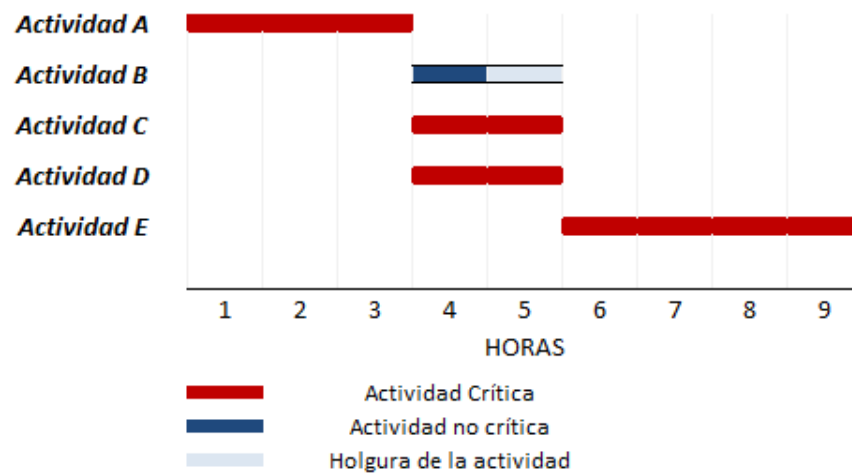


Figura. Cronograma de gráfico del proyecto.